ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν α και β φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί k και u, τέτοιοι ώστε

$$\alpha = k\beta + u, \quad 0 \leq u < \beta$$

- Η διαδικασία εύρεσης των k και u λέγεται Ευκλείδεια ή αλγοριθμική διαίρεση των α και β.
- Το k και u λέγονται πηλίκο και υπόλοιπο, αντίστοιχως
- Μια ευκλείδεια διαίρεση λέγεται τέλεια εαν έχει $u=0$
- Τα δυνατά υπόλοιπα του α με το β στο $\mathbb{N}$ είναι:
  $u = 0, 1, \ldots, \beta-1$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν α και β ακέραιοι αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι k και u, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha = k\beta + u, \quad 0 \leq u < |\beta|$$

- Τα δυνατά υπόλοιπα μεταξύ των α και β στο $\mathbb{Z}$ είναι:
  $u = 0, 1, \ldots, |\beta|-1$

Άσκηση 1η

Να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα u της διαίρεσης του ακεραίου $\alpha = 6k+7$ με τον αριθμό:
i) 6 , ii) 3 και iii) 12

ΛΥΣΗ

i) $\alpha = 6k+7 = 6k+7 = 6k+6+1 = 6(\underbrace{k+1}_{\mu})+1 = 6\mu+1$

Άρα, $u=1$

ii) $\alpha = 6k+7 = 3\cdot 2k + 3\cdot 2 + 1 = 3(\underbrace{2k+2}_{\mu})+1 = 3\mu+1$

Άρα, $u=1$

iii) $\alpha = 6k+7$ και θα το φέρουμε σε μορφή $\alpha = 12\mu+\lambda$ οπου $0 \leq \lambda < 12$, οπότε το k έχει μορφή $2\rho+u'$

ο k περιττός ή ο k άρτιος

$k = 2\rho+1$ ή $k = 2\rho$

- Για $k=2\rho$, $\alpha = 2\rho\cdot 6 + 7 = 12\rho+7$, άρα $u=7$
- Για $k=2\rho+1$, $\alpha = 6\cdot(2\rho+1)+7 = 12\rho+13 = 12(\underbrace{\rho+1}_{\mu})+1 = 12\mu+1$, οπότε $u=1$

Άρα, $u=1$ ή $u=7$

Ασκηση 2η

i) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του 51 με το 5

ii) Να βρείτε τα α,β,γ θετικά ακέραιοι, αν ισχύει:

$α + 5β + 20γ = 51$, $α < 5$ και $β < 4$

ΛΥΣΗ

i) $51 = 5 \cdot 10 + 1$, $0 \leq 1 < 5$. Άρα πηλίκο είναι 10 και υπόλοιπο 1

ii) Έχουμε:

$α + 5β + 20γ = 51 \Rightarrow α + 5(β + 4γ) = 51$, $0 < α < 5$

Δηλ. το πηλίκο της ευκλείδειας διαίρεσης του 51 με το 5 είναι ίσο με $β + 4γ$ και το υπόλοιπο α

Και αλλά οι αριθμοί αυτοί γνωρίζουμε ότι είναι μοναδικοί

Άρα, $β + 4γ = 10$ και $α = 1$

Ομοίως, έχουμε

- $10 = 4γ + β$ με $0 \leq β < 4$
- $10 = 4 \cdot 2 + 2$ με $0 \leq 2 < 4$

οπότε, προφανώς $γ = 2$ & $β = 2$.

Ασκηση 3η

Αν ο αριθμός 32 διαιρεθεί με τον θετικό ακέραιο α, δίνει πηλίκο 3. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του υπόλοιπου της διαίρεσης αυτής

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 32 με το α

Έστω υ το υπόλοιπο αυτό

Είναι $32 = α \cdot 3 + υ$ (1) $0 \leq υ < α$

$\Rightarrow υ = 32 - 3 \cdot α$ άρα $0 \leq (32 - 3α) < α \Rightarrow$

$\Rightarrow 32 - 3α \geq 0$ και $32 - 3α < α \Rightarrow$

$\Rightarrow α \leq \frac{32}{3}$ και $α > 8 \Rightarrow α = 9$ ή $α = 10$

Άρα, $υ = 32 - 3 \cdot 9$ ή $υ = 32 - 3 \cdot 10 =$

$υ = 5$ ή $υ = 2$

Άσκηση 4η.

Για ποιές τιμές του ακεραίου k ο αριθμός $\frac{2k+1}{3}$ είναι ακέραιος;

Λύση

Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του k με το 3 είναι: $k=3\lambda+\upsilon$ (1), $\upsilon=0,1,2$

Έχουμε:

$$\frac{2k+1}{3}=\frac{2\cdot(3\lambda+\upsilon)+1}{3}=\frac{6\lambda+2\upsilon+1}{3}=2\lambda+\frac{2\upsilon+1}{3}$$

Άρα, $\frac{2k+1}{3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{2\upsilon+1}{3}\in\mathbb{Z}$

Περιπτώσεις:

- Αν $\upsilon=0\Rightarrow\frac{2\upsilon+1}{3}=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$
- Αν $\upsilon=1\Rightarrow\frac{2\upsilon+1}{3}=1\in\mathbb{Z}$
- Αν $\upsilon=2\Rightarrow\frac{2\upsilon+1}{3}=\frac{5}{3}\notin\mathbb{Z}$

Οπότε από (1) για $\upsilon=1$ είναι: $k=3\lambda+1,\ \lambda\in\mathbb{Z}$

Άσκηση 5η

Αν ο α περιττός ακέραιος, νδο $\frac{(\alpha^2+15)\cdot(\alpha^2+7)}{128}\in\mathbb{Z}$

Λύση

Γενικά αν α περιττός τότε $\alpha^2=8\lambda+1$, $\lambda\in\mathbb{Z}$

οπότε,

$$\frac{(\alpha^2+15)(\alpha^2+7)}{128}=\frac{(8\lambda+1+15)(8\lambda+1+7)}{128}=$$

$$=\frac{(8\lambda+16)(8\lambda+8)}{128}=\frac{\cancel{64}\cdot(\lambda+2)(\lambda+1)}{\cancel{128}}=\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)}{2}=$$

$$=\frac{\cancel{2}\mu}{\cancel{2}}=\mu\in\mathbb{Z}$$

, $(\lambda+1)(\lambda+2)=2\mu$ διότι το γινόμενο 2 διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος)

Άσκηση 6η

ΝΔΟ ο αριθμός 3 διαιρεί τους ακέραιους α και β αν-ν ο 3 διαιρεί το άθροισμα $α^2+β^2$

Λύση

($\Rightarrow$): Έστω ο $3|α$ & $3|β \Rightarrow 3|α^2$ & $3|β^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3|α^2+β^2$.

($\Leftarrow$) Έστω ο $3|α^2+β^2$

Προφανώς, τα α και β θα γράφονται στη μορφή
$α=3\cdot k_1+υ_1$, $0\le υ_1<3$ και $β=3k_2+υ_2$, $0\le υ_2<3$

Και αρκεί νδο $υ_1=υ_2=0$

$$α^2=(3k_1+υ_1)^2=9k_1^2+6k_1υ_1+υ_1^2=3(3k_1^2+2k_1υ_1)+υ_1^2=$$
$$=3λ_1+υ_1^2$$

$$β^2=(3k_2+υ_2)^2=9k_2^2+6k_2υ_2+υ_2^2=3(3k_2^2+2k_2υ_2)+υ_2^2=$$
$$=3λ_2+υ_2^2$$

Άρα,

$$α^2+β^2=3λ+(υ_1^2+υ_2^2) \quad \text{με } λ=λ_1+λ_2\in\mathbb{Z}$$

Αφού, $3|α^2+β^2$ και $3|3λ \Rightarrow 3|υ_1^2+υ_2^2$

Αλλά $υ_1, υ_2\in\{0,1,2\}$, οπότε για τις τιμές της παράστασης $(υ_1^2+υ_2^2)$, έχουμε τον πίνακα:

$υ_2 \backslash υ_1$	0	1	2
0	$υ_1^2+υ_2^2=0$	$υ_1^2+υ_2^2=1$	$υ_1^2+υ_2^2=4$
1	$υ_1^2+υ_2^2=1$	$υ_1^2+υ_2^2=2$	$υ_1^2+υ_2^2=5$
2	$υ_1^2+υ_2^2=4$	$υ_1^2+υ_2^2=5$	$υ_1^2+υ_2^2=8$

που προκύπτει ότι $3|(υ_1^2+υ_2^2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow υ_1=0$ & $υ_2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow α=3k_1$ & $β=3k_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3|α$ & $3|β$

Άσκηση 7η

Αν $α, β, γ$ περιττοί ακέραιοι, νδο η εξίσωση $αx^2+βx+γ=0$ δεν έχει ακέραιες λύσεις. Έχει ακέραιες λύσεις η εξίσωση $x^2+3^{1997}x+2001=0$;

ΛΥΣΗ

Έστω ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα, την $x=ρ$

Τότε, $α\cdot ρ^2+βρ+γ=0$ (1)

- Αν $ρ$ άρτιος, τότε και ο $ρ^2$ άρτιος, οπότε $α\cdot ρ^2+βρ$ άρτιος. Άρα ο $αρ^2+βρ+γ$ περιττός, αφού $γ$ περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο από την (1)
- Αν $ρ$ περιττός, τότε και ο $ρ^2$ περιττός και αφού οι $α, β$ είναι περιττοί, οι αριθμοί $α\cdot ρ^2$ και $βρ$ θα είναι περιττοί. Άρα το άθροισμα $α\cdot ρ^2+βρ$ θα αποτελεί άρτιο. Αλλά ο $γ$ περιττός, άρα ο $α\cdot ρ^2+βρ+γ$ περιττός, άτοπο από την (1)

Έστω $α=1$, $β=3^{1997}$ και $γ=2001$ περιττοί

Άρα, βάσει της παραπάνω πρότασης δεν θα έχει ακέραιες λύσεις.

Άσκηση 8η

ΝΔΟ

i) Το τετράγωνο ενός άρτιου είναι της μορφής $α^2=4λ$, $λ\in\mathbb{Z}$ ενώ το τετράγωνο ενός περιττού είναι της μορφής $α^2=4λ+1$, $λ\in\mathbb{Z}$ (ή $α^2=8μ+1$, $μ\in\mathbb{Z}$)

ii) Αν $α, β$ περιττοί τότε η εξίσωση $x^2=α^2+β^2$ δεν έχει ακέραιες ρίζες

iii) Κανένας από τους όρους της αριθμητικής προόδου: 6, 10, 14, 18, 22... δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού

ΛΥΣΗ

i) Έστω $α$ άρτιος $\Rightarrow α=2k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow α^2=4k^2=4λ, λ=k^2\in\mathbb{Z}$

Έστω $α$ περιττός $\Rightarrow α=2k+1, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow α^2=(2k+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow α^2=4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1 = 4λ+1, \ λ=k^2+k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow α^2 = 4\underbrace{k(k+1)}_{\text{διαδοχικοί ακέραιοι}}+1 = 4\cdot 2μ+1 = 8μ+1, \ 2μ=k(k+1)\in\mathbb{Z}$

ii) α, β περιττοί $\Rightarrow \alpha^2 = 4\lambda + 1$ και $\beta^2 = 4\mu + 1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$

Επομένως, ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4(\lambda + \mu) + 2 = 4\rho + 2, \quad \rho = \lambda + \mu \in \mathbb{Z}$$

Έστω η εξίσωση έχει μια ακέραια ρίζα, την $\gamma \in \mathbb{Z}$.

τότε: $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 4\rho + 2$ Άτοπο βάση του (i)

iii) Καθένας από τους αριθμούς της αριθμητικής προόδου είναι της μορφής $4\lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

όποτε, βάση της (ii) δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.

Άσκηση 8η

ΝΔΟ

i) το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται του 6.

ii) $6 \mid \alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$

iii) $6 \mid (\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$

ΛΥΣΗ

i) Έστω διαδοχικοί ακέραιοι $\alpha-1, \alpha, \alpha+1$

και ΘΔΟ $6 \mid (\alpha-1)(\alpha+1)\alpha \Leftrightarrow 6 \mid \alpha^3 - \alpha$.

Αν $\alpha = 6k + \upsilon$, $0 \le \upsilon < 6$ (Ευκλείδεια διαίρεση του α με το 6)

Άρα $\alpha^3 - \alpha = (6k+\upsilon)^3 - \alpha = 6\underbrace{(36k^3 + 18k^2\upsilon + 3k\upsilon^2 - k)}_{\lambda} + \upsilon^3 - \upsilon =$

$$= 6\lambda + (\upsilon^3 - \upsilon) = \begin{cases} 6\lambda, & \text{αν } \upsilon = 0 \\ 6\lambda, & \text{αν } \upsilon = 1 \\ 6\lambda + 6, & \text{αν } \upsilon = 2 \\ 6\lambda + 24, & \text{αν } \upsilon = 3 \\ 6\lambda + 60, & \text{αν } \upsilon = 4 \\ 6\lambda + 120, & \text{αν } \upsilon = 5 \end{cases}$$

Άρα, βλέπουμε ότι $\alpha^3 - \alpha = k \cdot 6$, $k \in \mathbb{Z}$

ii) $\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1) = \alpha(\alpha+1)((\alpha-1) + (\alpha+2)) =$

$= (\alpha-1)\alpha\cdot(\alpha+1) + \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) = 6\lambda + 6\mu = 6(\lambda+\mu)$

iii) $\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4\alpha = \alpha(\alpha+4)(\alpha-1) = (\alpha-1)\alpha(\alpha+4) =$

$= (\alpha-1)\alpha((\alpha+1)+3) = (\alpha-1)\alpha(\alpha+1) + (\alpha-1)\alpha = 6\lambda + 3\cdot 2\mu =$

$= 6(\lambda+\mu)$.